Темы к коллоквиуму по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения»
(1-3 потоки ПМИ, 3 семестр 2022 г.).

1. Понятие дифференциального уравнения. Математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями: движение точки в пространстве, динамика популяции, модель хищник-жертва и ее анализ.
2. Понятие решения ОДУ. Постановка задачи с начальными данными (задача Коши) для разрешенного относительно производной ОДУ 1-го порядка. Геометрический смысл задачи Коши.
3. Общий интеграл ОДУ первого порядка, примеры.
4. ОДУ в симметричном виде. Понятия параметрического решения и общего интеграла (ОИ). Уравнения в полных дифференциалах (УПД), существование ОИ. Теорема о необходимом и достаточном условии УПД.
5. Условие Липшица, примеры. Доказательство леммы Гронуолла – Беллмана.
6. Теорема единственности решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной.
7. Теорема существования решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной.
8. Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Примеры.
9. Особые решения уравнения первого порядка. Необходимые условия, примеры.
10. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Понятие решения. Теорема единственности решения задачи Коши для нормальной системы.
11. Теорема существования решения задачи Коши для нормальной системы на всем отрезке. Пример.
12. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n-ого порядка на всем отрезке.
13. Теоремы существования и единственности решения линейной системы ОДУ и решения линейного ОДУ n-ого порядка на всем отрезке.
14. Общие свойства линейного ОДУ n-ого порядка.
15. Линейная зависимость и независимость скалярных функций. Определитель Вронского. Пример.
16. Линейная зависимость и независимость решений линейного однородного ОДУ n-ого порядка. Теорема об альтернативе для определителя Вронского.
17. Фундаментальная система решений (ФСР) для линейного однородного ОДУ n-ого порядка. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении линейного однородного ОДУ n-ого порядка.
18. Общее решение линейного неоднородного ОДУ n-ого порядка. Метод вариации постоянных.
19. Построение ФСР для линейного ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами.
20. Построение дифференциального уравнения n-ого порядка по известной системе решений. Формула Остроградского-Лиувилля.
21. Общая теория однородных линейных систем ОДУ. Теорема об эквивалентности системы ОДУ матричному ОДУ. Свойства решений матричного ОДУ.
22. Линейная зависимость и независимость вектор-функций. Определитель Вронского. Примеры.
23. Линейная зависимость и независимость решений линейной однородной системы ОДУ. Теорема об альтернативе для определителя Вронского.
24. Фундаментальная система решений (ФСР) для линейной однородной системы ОДУ. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении линейной системы ОДУ. Матрицант.
25. Общее решение линейной неоднородной системы ОДУ. Метод вариации постоянных.
26. Построение ФСР для системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае существования базиса из собственных векторов матрицы системы.
27. Построение ФСР для системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда нет базиса из собственных векторов матрицы системы.

Вопрос 1.

Дифференциальным ур-ем наз-ся ур-е, содержащее произв-ые неизв ф-и

Ур-е, содержащее произв-ые неизв. ф-и только по 1 незав. перем-ой, наз-ся обыкновенным дифференциальным ур-ем.

Ур-е, содержащее произв-ые неизв. ф-и по нескольким незав. перем-ым, наз-ся дифференциальным ур-ем в частных производных.

Порядком дифф. ур-я наз-ся наиб. порядок входящих в него произв-ых.

$F(t, y(t), y'(t)) = 0$, $t \in [a; b]$ – обыкн. дифф. ур-е 1-ого пор-ка.

$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$, $t \in [a; b]$ – обыкн. дифф. ур-е n-ого пор-ка

$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$, $t \in [a; b]$ – обыкн. дифф. ур-е n-ого пор-ка, разрешённое отн-но старш. произв-ой $\quad (1.1)$

$\exists\, \exists f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$. Нормальной с-мой обыкн. дифф. ур-й отн-но неизв. ф-й наз-ся с-ма

$$\begin{cases} y_1(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ y_2(t) = f_2(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n(t) = f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{cases} \quad (1.2)$$

Утв. Ур-е (1.1) м.б. сведено к норм. с-ме (1.2)

Проц-с нахождения реш-й наз-ся интегрированием.

Кривая $(t, y_1(t), \dots, y_n(t))$ наз-ся интегральной кривой.

Пр-во $(y_1, \dots, y_n)$ наз-ся фазовым пр-вом

Кривая $(y_1(t), \dots, y_n(t))$ в фаз. пр-ве наз-ся фазовой траекторией

Мат. модели:

1) Движ-е мат. т-ки в пр-ве.

$$\begin{cases} x'(t) = u(t) \\ y'(t) = v(t) \\ z'(t) = w(t) \\ u'(t) = f_1(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)) \\ v'(t) = f_2(\text{———} \,\|\, \text{———} \,\|\, \text{———} \,\|\, \text{———} \,\|\, \text{———}) \\ w'(t) = f_3(\text{———} \,\|\, \text{———} \,\|\, \text{———} \,\|\, \text{———} \,\|\, \text{———}) \end{cases}$$

Для опр-я траект-и необх-мы нач. полож-е и ск-ть т-ки в t_0:
$x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$, $u(t_0)$, $v(t_0)$, $w(t_0)$

2) Динамика популяции.

$u'(t) = au(t) - bu(t)$, a - коэф-т рожд-ти, b - смерт-ти

$u(t) = u(t_0)\, e^{(a-b)(t-t_0)}$

3) Модель хищник-жертва.

$$\begin{cases} u'(t) = au(t) - bu(t)v(t) \text{ - жертвы} \\ v'(t) = cu(t)v(t) - dv(t) \text{ - хищники} \end{cases}$$

Жертвы - корм хищников, хищники не корм жертв.

Для опр-я кол-ва жертв и хищников необх-мо кол-во жертв и хищников в t_0: $u(t_0)$, $v(t_0)$

Вопрос 2.

Рассм. обыкн. дифф. ур-е 1-ого пор-ка, разр. отн-но ст. пр.:

$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (1.1)$

Ф-я $y(t)$ наз-ся реш-ем ур-я (1.1) на отр-ке $[a; b]$, если

1) $y(t) \in C^1[a; b]$
2) $(t, y(t)) \in D \quad \forall t \in [a; b]$
3) $y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in [a; b]$

$\exists\, f(t, y)$ опр-на и непр-на в пр-уг-ке П:

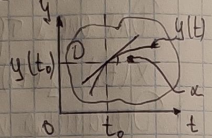
$\Pi = \{(t, y) : |t - t_0| \le T,\ |y - y_0| \le A\}$

Рассм. на отр-ке $[t_0 - T; t_0 + T]$ с-му

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Требуется найти ф-ю $y(t)$, дал уд-ет с-ме. Эта задача наз-ся задачей с нач. усл-ем (задачей Коши)

Ф-я $\bar{y}(t)$ наз-ся реш-ем задачи Коши на отр-ке $[t_1, t_2]$, если:



1) $\bar{y}(t) \in C^1[t_1, t_2]$

2) $|\bar{y}(t) - y_0| \le A \quad \forall t \in [t_1, t_2]$

3) $\bar{y}(t)$ уд-ет с-ме.

$\operatorname{tg} \alpha = f(t_0; y(t_0))$ – геом. смысл.

Вопрос 3

Дифф. ур-ем в симметричном виде наз-ся ур-е

$M(t, y)\,dt + N(t, y)\,dy = 0, \quad (1)$ (1)

где $M(t, y)$ и $N(t, y)$ опр-ны и непр-ны на $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и

$|M(t, y)| + |N(t, y)| > 0 \quad \forall (t, y) \in D$

Ур-е

$\Phi(t, y, c) = 0$

наз-ся интегралом ур-я (1), в обл-ти D, если при $\forall c \in C_0$ оно опр-ет реш-е ур-я (1)

Интеграл наз-ся общим, если он опр-ет все реш-я ур-я (1), т.е. $\forall t = \varphi(\tau),\ y = \psi(\tau)\ \exists \tilde{c} \in C_0 : \ \Phi(\varphi(\tau), \psi(\tau), \tilde{c}) \equiv 0$

ξ: $t\,dt + y\,dy = 0$.

$t^2 + y^2 - c = 0$ – общ. инт-л, $C_0 = [c \in \mathbb{R} : c > 0]$

ξ: $y'(t) = \sqrt[3]{y^2(t)}$

$y = \frac{(t-c)^3}{27} = 0$ – не общ. инт-л, т.к. не включает $y_0(t) \equiv 0$.

Вопрос 4

Дифф. ур-ем в симметричном виде наз-ся ур-е

$M(t, y)\,dt + N(t, y)\,dy = 0, \quad (1)$ (1)

где $M(t, y)$ и $N(t, y)$ опр-ны и непр-ны на $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и

$|M(t, y)| + |N(t, y)| > 0, \ \forall (t, y) \in D$

Пара ф-й $t = \varphi(\tau)$ и $y = \psi(\tau)$ наз-ся параметрическим реш-ем ур-я в симм. виде (1) на отр-ке $[\tau_1; \tau_2]$, если

1) $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$ непр-но диф-мы на $[\tau_1; \tau_2]$

$|\varphi'(\tau)| + |\psi'(\tau)| > 0 \quad \forall \tau \in [\tau_1; \tau_2]$

2) $(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \in D \quad \forall \tau \in [\tau_1; \tau_2]$

3) $M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\,\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\,\psi'(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in [\tau_1; \tau_2]$

ξ: $t\,dt + y\,dy = 0$

$$\begin{cases} t = C\cos\tau, \\ y = C\sin\tau, \end{cases} \quad \tau \in [0; 2\pi]$$

Ур-е $\Phi(t, y, c) = 0$ наз-ся интегралом ур-я (1) в обл-ти D, если $\forall c \in C_0$ оно опр-ет реш-е ур-я (1).

Инт-л наз-ся общим, если он опр-ет все реш-я ур-я (1), т.е. $\forall t = \varphi(\tau),\ y = \psi(\tau) \in D\ \exists \tilde{c} \in C_0 : \ \Phi(\varphi(\tau), \psi(\tau), \tilde{c}) \equiv 0$

ξ: $t\,dt + y\,dy = 0$

$t^2 + y^2 - c = 0$ – общ. инт-л, $C = \{c > 0\}$

Дифф. ур-е в симм. виде наз-ся ур-ем в полных дифф-лах в обл-ти D, если $\exists V(t, y)$:

1) она непр. дифф-ма в D

2) $\left|\frac{\partial V(t,y)}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial V(t,y)}{\partial y}\right| > 0 \quad \forall (t, y) \in D$

3) $M(t, y) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial t}, \quad N(t, y) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial y} \quad \forall (t, y) \in D$

Крит-й УПД.] вып-ны усл-я ОДУ в симм. виде, частн. произв-ые $M(t, y)$ и $N(t, y)$ непр-ны в D. (1) явл-ся УПД $\Leftrightarrow$

$\Leftarrow \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} \quad \forall (t,y) \in D.$

Д-во:

$\Rightarrow$)] (1) - УПД $\overset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \exists V(t,y): \left|\frac{\partial V(t,y)}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial V(t,y)}{\partial y}\right| > 0, \ M(t,y) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial t},$

$N(t,y) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial y} \quad \forall (t,y) \in D \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial t \partial y}, \ \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial y \partial t} \Rightarrow \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}$

$\Leftarrow$)] $\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}$. Рассм. ф-ю

$V(t,y) = \int_{t_0}^{t} M(\xi, y)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} N(t_0, \eta)\, d\eta \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial V(t,y)}{\partial t} = M(t,y) \\ \frac{\partial V(t,y)}{\partial y} = N(t,y) \end{matrix} \overset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} (1) - \text{УПД}$

ч.т.д.

Вопрос 5.

Ф-я $f(t,y)$, задан. в пр-уг-ке П, уд-ет в П усл-ю Липшица по y, если $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2| \ \forall (t,y_1), (t,y_2) \in D$, где L - полож. const

Зам. $f(t,y)$ и $f'_y(t,y)$ огр-ны и непр-ны в П $\Rightarrow f(t,y)$ уд-ет в П усл-ю Липшица.

Зам. $f(t,y)$ м.б. не дифф-ма по y, но уд-ть усл-ю Липшица.

Пр: $f(t,y) = (t - t_0) \cdot |y - y_0|$

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |t - t_0| \cdot \big||y_1 - y_0| - |y_2 - y_0|\big| \le T|y_1 - y_2|$

Зам. $f(t,y)$ м.б. непр-на по y, но не уд-ть усл-ю Липшица.

Пр: $f(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & 0 \le y \le 1 \\ -\sqrt{|y|}, & -1 \le y \le 0 \end{cases}$

Л. Гронуолла-Беллмана. $z(t) \in C[a;b]$, $0 \le z(t) \le c + d\left|\int_{t_0}^{t} z(\tau)\, d\tau\right| \ \forall t \in [a;b]$

где $c \ge 0$, $d > 0$, $t_0 \in [a;b]$, $\Rightarrow z(t) \le c e^{d|t - t_0|} \ \forall t \in [a;b]$

Д-во:

Рассм. $t \ge t_0$.] $p(t) = \int_{t_0}^{t} z(\tau)\, d\tau$, $t \in [t_0, b] \Rightarrow p'(t) = z(t) \ge 0$

$p(t_0) = 0 \Rightarrow p'(t) \le c + d\,p(t) \quad t \in [t_0, b] \Rightarrow$

$\Rightarrow p'(t) e^{-d(t-t_0)} \le c e^{-d(t-t_0)} + d\,p(t) \cdot e^{-d(t-t_0)}, \ t \in [t_0; b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(p(t) e^{-d(t-t_0)}\right) \le c e^{-d(t-t_0)}, \ t \in [t_0; b] \overset{\int}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow p(t) e^{-d(t-t_0)} - p(t_0) \le c \int_{t_0}^{t} e^{-d(\tau - t_0)}\, d\tau = \frac{c}{d}\left(1 - e^{-d(t-t_0)}\right), \ t \in [t_0; b] \overset{p(t_0)=0}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow d\,p(t) \le c e^{d(t-t_0)} - c \Rightarrow$

$\Rightarrow z(t) \le c + d\,p(t) \le c + c e^{d(t-t_0)} - c = c e^{d(t-t_0)}, \ t \in [t_0; b]$

Рассм. $t \le t_0$.] $q(t) = \int_{t}^{t_0} z(\tau)\, d\tau$, $t \in [a; t_0] \Rightarrow$

$\Rightarrow q'(t) = -z(t) \le 0, \ q(t_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -q'(t) \le c + d\,q(t), \ t \in [a; t_0] \Rightarrow$

$\Rightarrow -q'(t) e^{-d(t_0 - t)} \le c e^{-d(t_0 - t)} + d\,q(t) e^{-d(t_0 - t)}, \ t \in [a; t_0] \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{d}{dt}\left(q(t) e^{-d(t_0 - t)}\right) \le c e^{-d(t_0 - t)}, \ t \in [a; t_0] \overset{\int}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow q(t) e^{-d(t_0 - t)} - q(t_0) \le c \int_{t}^{t_0} e^{-d(t_0 - \tau)}\, d\tau = \frac{c}{d}\left(1 - e^{-d(t_0 - t)}\right), \ t \in [a; t_0] \overset{q(t_0)=0}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow d\,q(t) \le c e^{d(t_0 - t)} - c \Rightarrow$

$\Rightarrow z(t) \le c + d\,q(t) \le c + c e^{d(t_0 - t)} - c = c e^{d(t_0 - t)}, \ t \in [a; t_0]$

ч.т.д.

Вопрос 6.

Т. единств-ти реш-я задачи Коши.] $f(t,y)$ непр-на в П и уд-ет усл-ю Липшица. $y_1(t)$, $y_2(t)$ - реш-я задачи Коши на $[t_1; t_2] \Rightarrow y_1(t) = y_2(t)$

Д-во:

$y_1(t)$, $y_2(t)$ - реш-я задачи Коши $\overset{\wedge}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau))\, d\tau \\ y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_2(\tau))\, d\tau \end{cases}, \ t \in [t_1; t_2] \Rightarrow$

$\Rightarrow |y_1(t) - y_2(t)| \le \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau))\, d\tau - \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_2(\tau))\, d\tau\right| \le$

$\le \left|\int_{t_0}^{t} |f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))|\, d\tau\right|, \ t \in [t_1; t_2] \overset{\text{усл-е Липшица}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow |y_1(t) - y_2(t)| \le L \left| \int_{t_0}^{t} |y_1(\tau) - y_2(\tau)| \, d\tau \right|, \quad t \in [t_1; t_2]$

$\rceil \; z(t) = |y_1(t) - y_2(t)| \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le z(t) \le L \left| \int_{t_0}^{t} z(\tau) \, d\tau \right|, \quad t \in [t_1; t_2] \overset{\text{л. Гронуолла-Беллмана}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow z(t) = 0, \; t \in [t_1; t_2] \Rightarrow y_1(t) = y_2(t), \; t \in [t_1; t_2]$

ч.т.д.

Вопрос 7.

Т. сущ-я реш-я задачи Коши. $f(t, y)$ непр-на в П, уд-ет в П усл-ю Липшица по y, $|f(t, y)| \le M \; \forall (t, y) \in П \Rightarrow$ $\Rightarrow$ на отр-ке $[t_0 - h; t_0 + h]$: $h = \min\{T, \frac{A}{M}\}$ $\exists \, y(t)$, кот. явл-ся реш-ем задачи Коши.

Д-во:

~~Дост-но д-ть $\exists \, y(t) \in C[t_0 - h; t_0 + h]$: $|y(t) - y_0| \le A \; \forall t \in [\ldots]$,~~

~~$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) \, d\tau, \; t \in [t_0 - h; t_0 + h]$~~

Рассм. посл-ть ф-й $y_k(t)$: $y_0(t) = y_0$, $y_{k+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_k(\tau)) \, d\tau$

1) $k = 0$

$y_0(t) \in C[t_0 - h; t_0 + h], \; |y_0(t) - y_0| \le A, \; t \in [\ldots]$

2) $k = m$

$\rceil \; y_m(t) \in C[t_0 - h; t_0 + h], \; |y_m(t) - y_0| \le A, \; t \in [\ldots]$

3) $k = m + 1$

$|y_m(t) - y_0| \le A \Rightarrow f(t, y_m(t)) \in C[t_0 - h; t_0 + h] \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau)) \, d\tau \in C[t_0 - h; t_0 + h] \Rightarrow y_{m+1}(t) \in C[a; b]$

$|y_{m+1}(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau)) \, d\tau \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, y_m(\tau))| \, d\tau \right| \le$

$\le \left| \int_{t_0}^{t} M \, d\tau \right| \le Mh \le M \cdot \frac{A}{M} = A, \; t \in [\ldots]$

$\overset{\text{инд-я}}{\Longrightarrow} \forall k \;\; y_k(t) \in C[\ldots], \; |y_k(t) - y_0| \le A \; \forall t \in [\ldots]$

1) $k = 0$

$|y_1(t) - y_0(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_0(\tau)) \, d\tau \right| \le Mh \le A \quad t \in [\ldots]$

2) $k = m - 1$

$\rceil \; |y_m(t) - y_{m-1}(t)| \le A L^{m-1} \cdot \frac{|t - t_0|^{m-1}}{(m-1)!}$

3) $k = m$

$|y_{m+1}(t) - y_m(t)| \le \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, y_m(\tau)) - f(\tau, y_{m-1}(\tau))| \, d\tau \right|, \; t \in [\ldots] \overset{\text{усл. Липшица}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow |y_{m+1}(t) - y_m(t)| \le L \cdot \left| \int_{t_0}^{t} |y_m(\tau) - y_{m-1}(\tau)| \, d\tau \right| \le$

$\le L \cdot \left| \int_{t_0}^{t} A L^{m-1} \cdot \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} \, d\tau \right| = A L^m \frac{|t - t_0|^m}{m!}, \quad t \in [\ldots]$

$\overset{\text{инд-я}}{\Longrightarrow} \forall k \;\; |y_{k+1}(t) - y_k(t)| \le A L^k \frac{|t - t_0|^k}{k!}$

$y_k(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_{k-1}(\tau)) \, d\tau \Rightarrow y_k(t) = y_0 + \sum_{n=1}^{k} (y_n(t) - y_{n-1}(t))$

$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \le A L^{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} = c_n \overset{\sum c_n \to}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} (y_n(t) - y_{n-1}(t)) \underset{[\ldots]}{\rightrightarrows} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{y_k(t)\} \underset{[\ldots]}{\rightrightarrows} y(t)$: $y(t) \in C[\ldots]$

$|y_k(t) - y_0| \le A \; \forall t \in [\ldots] \Rightarrow |y(t) - y_0| \le A \; \forall t \in [\ldots]$

$\{y_k(t)\} \underset{[\ldots]}{\rightrightarrows} y(t) \Rightarrow \forall \delta > 0 \; \exists k_0: \forall k \ge k_0 \;\; |y_k(t) - y(t)| < \delta \; \forall t \in [\ldots] \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \frac{\varepsilon}{Lh}, \, k_0(\delta): \forall k \ge k_0, \, \tau \in [\ldots] \;\; |f(\tau, y_k(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| \le$

$\le L |y_k(\tau) - y(\tau)| < \frac{\varepsilon}{h} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_k(\tau)) \, d\tau - \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) \, d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{h} |t - t_0| \le \varepsilon, \quad t \in [\ldots] \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) \, d\tau$

$y(t) \in C[\ldots], \; |y(t) - y_0| \le A \; \forall t \in [\ldots], \; y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) \, d\tau \overset{\wedge}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow$ $y(t)$ явл-ся реш-ем задачи Коши на отр-ке $[\ldots]$

ч.т.д.

Вопрос 8.

$F(t, y(t), y'(t)) = 0 \;\; (1)$ – ОДУ I пор-ка, не разр. отн-но ст. пр. [1]

Ф-я $y(t)$ наз-ся реш-ем ур-я (1) на отр-ке $[t_1; t_2]$, если

1) $y(t)$ непр-но диф-ма на $[t_1; t_2]$

2) $(t, y(t), y'(t)) \in D \;\; \forall t \in [t_1; t_2]$

3) $F(t, y(t), y'(t)) = 0 \;\; \forall t \in [t_1; t_2]$

$$\begin{cases} F(t, y(t), y'(t)) = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$ – задача Коши

Особ-ти:

1) $F(t_0, y_0, y_0') = 0$ – обязательно для сущ-я реш-я

2) $\frac{\partial F(t_0, y_0, y_0')}{\partial p} = 0$ – усл-й м.б. недост-но

Т. о сущ-и и ед-ти реш-я задачи Коши. $F(t, y, p)$ опр-на в D и вып:

1) $F(t_0, y_0, y_0') = 0$

2) $F(t, y, p)$, $\frac{\partial F(t, y, p)}{\partial y}$, $\frac{\partial F(t, y, p)}{\partial p}$ непр-ны в D.

3) $\frac{\partial F(t_0, y_0, p_0)}{\partial p} \neq 0$.

Тогда $\exists h > 0$: на $[t_0 - h; t_0 + h]$ $\exists!$ реш-е задачи Коши.

Д-во:

Рассм. ур-е $F(t, y, p) = 0$ в окр-ти (t_0, y_0, y_0')

$\exists \Omega_0$ – окр-ть (t_0, y_0): $\exists!$ $p = f(t, y)$, имеющая в Ω_0 непр. ЧП

$$\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = -\frac{\partial F(t, y, f(t, y))/\partial y}{\partial F(t, y, f(t, y))/\partial p}$$

и явл-ся реш-ем ур-я $F(t, y, p) = 0, \Rightarrow y_0' = f(t_0, y_0)$.

В окр-ти Ω_0:

1) $F(t, y(t), y'(t)) = 0$
$$\Updownarrow$$
$y'(t) = f(t, y(t))$

2) $\begin{cases} F(t, y(t), y'(t)) = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Рассм. задачу Коши в пр-уг-ке

$\Pi = \{(t, y) : |t - t_0| \leq a_0, |y - y_0| \leq b_0\} \subset \Omega_0$

$f(t, y)$ непр-на в $\Omega_0 \Rightarrow f(t, y)$ непр-на в Π

$\frac{\partial f(t, y)}{\partial y}$ непр-на в $\Pi \Rightarrow f(t, y)$ уд-ет усл-ю Липшица по y, $L = \max_{(t,y) \in \Pi} \left|\frac{\partial f(t, y)}{\partial y}\right|$ $\Big\}$ $\xRightarrow{\text{т. о реш-и}}$

$\Rightarrow \exists h > 0$: $\exists!$ реш-е задачи Коши $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ на отр-ке $[\ldots] \Rightarrow \ldots$

ч.т.д.

ξ: $(y'(t))^2 - (t + y(t))\, y'(t) + t y(t) = 0$.

$\left[\begin{array}{l} y'(t) = t \\ y'(t) = y(t) \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y_1(t) = \frac{t^2}{2} + C_1 \\ y_2(t) = C_2 e^t \end{array}\right.$

ξ: $\begin{cases} (y'(t))^2 - (t + y(t))\, y'(t) + t y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

$(t_0, y_0, y_0') = (0, 1, 0) \Rightarrow F(0, 1, 0) = 0$, $\frac{\partial F(0, 1, 0)}{\partial p} = -1$.

$y(t) = \frac{t^2}{2} + 1$.

Вопрос 9

Ф-я $y = \xi(t)$ наз-ся особым реш-ем ОДУ $F(t, y(t), y'(t)) = 0$ на отр-ке $[t_1; t_2]$, если $y = \xi(t)$ явл-ся реш-ем этого ур-я на этом отр-ке и через каждую т-ку соотв-ей инт. кривой $\Gamma = \{(t, y) : y = \xi(t), t \in [t_1; t_2]\}$ проходит другое реш-е этого ур-я с тем же самым наклоном кас-ой, но отличающееся от ного реш-я в сколь угодно малой окр-ти т-ки.

Необх. усл-я сущ-я особых реш-й:

1) На кривой $\nexists \frac{\partial F}{\partial y}$ при $y = \xi(t)$

ξ: $y' = \sqrt[3]{y^2}$

$\left[\begin{array}{l} y(t) = 0 \\ y(t) = \frac{(t - C)^3}{27} \end{array}\right.$

$F(t, y, p) = p - \sqrt[3]{y^2} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ – не сущ-ет при $y = 0$

$y(t) = 0$ – особое

2) $F(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial p}(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0$.

$(t, \xi'(t), \zeta'(t))$ $\forall t$ явл-ся реш-ем с-мы

$$\begin{cases} F(t, y, p) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial p}(t, y, p) = 0 \end{cases}$$

Часто из с-мы можно исключить p и получить ур-е $\Phi(t, y) = 0$. Реш-я этого ур-я на пл-ти задаются линиями, к-ые наз-ся дискриминантными кривыми.

Возможны 3 случая:

1) ур-е $\Phi(t, y) = 0$ задаёт особое реш-е
2) ур-е $\Phi(t, y) = 0$ задаёт реш-е ур-я $F(t, y(t), y'(t)) = 0$
3) ур-е $\Phi(t, y) = 0$ не явл-ся реш-ем ур-я

Вопрос 10.

] $f_i(t, y_1, \dots, y_n)$ опр-ны и непр-ны для $t \in [a;b]$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Опр-е ф-и $y_1(t), \dots, y_n(t)$, к-ые явл-ся реш-ями норм. с-мы дифф. ур-й на отр-ке $[a;b]$

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \dots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{cases}$$

и уд-ют нач. усл-ям $y_1(t_0) = y_{01}, \dots, y_n(t_0) = y_{0n}$, наз-ся задачей Коши для норм. с-мы дифф. ур-й.

Ф-и $y_1(t), \dots, y_n(t)$ наз-ся реш-ями задачи Коши на отр-ке $[a, b]$, если

1) ф-и $y_i(t)$ непр-но дифф-мы на $[a;b]$
2) $y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t))$ $t \in [a;b]$
3) $y_i(t_0) = y_{0i}$

Ф-я $f(t, y_1, \dots, y_n)$ уд-ет усл-ю Липшица по $y_1, \dots, y_n$, если $\exists L > 0$: $|f(t, y_1, \dots, y_n) - f(t, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)| \le L(|y_1 - \tilde{y}_1| + \dots + |y_n - \tilde{y}_n|)$ $\forall t \in [a;b]$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n$

Т. ед-ти реш-я задачи Коши для норм. с-мы.] $f_k(t, y_1, \dots, y_n)$ опр-ны и непр-ны при $t \in [a;b]$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и уд-ют усл-ю Липшица с одной и той же const L. $y_1(t), \dots, y_n(t)$, $\tilde{y}_1(t), \dots, \tilde{y}_n(t)$ – реш-я задачи Коши на отр-ке $[a;b]$ $\Rightarrow y_i(t) = \tilde{y}_i(t)$, $i = \overline{1,n}$

Д-во:

$y_1(t), \dots, y_n(t)$ – реш-я задачи Коши $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t))$ $t \in [a;b]$, $y_i(t_0) = y_{0i}$ $\overset{\int}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1(\tau), \dots, y_n(\tau))\,d\tau \overset{\text{ан-но}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \tilde{y}_i(t) = \tilde{y}_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, \tilde{y}_1(\tau), \dots, \tilde{y}_n(\tau))\,d\tau$

усл-е Липшица $\Rightarrow$

$\Rightarrow |y_i(t) - \tilde{y}_i(t)| \le L\left|\int_{t_0}^{t} (|y_1(\tau) - \tilde{y}_1(\tau)| + \dots + |y_n(\tau) - \tilde{y}_n(\tau)|)\,d\tau\right|$

] $z(t) = |y_1(t) - \tilde{y}_1(t)| + \dots + |y_n(t) - \tilde{y}_n(t)|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |y_i(t) - \tilde{y}_i(t)| \le L\left|\int_{t_0}^{t} z(\tau)\,d\tau\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow z(t) \le nL\left|\int_{t_0}^{t} z(\tau)\,d\tau\right| \overset{\text{л. Гронуолла-Беллмана}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow z(t) = 0 \Rightarrow y_i(t) = \tilde{y}_i(t)$ $(t \in [a;b])$

Вопрос 11.

Т. сущ-я реш-я задачи Коши для норм. с-мы. $f_k(t, y_1, \dots, y_n)$ опр-ны и непр-ны при $t \in [a;b]$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}$ и уд-ют усл-ю Липшица с одной и той же const L. $\Rightarrow \exists\, y_1(t), \dots, y_n(t)$, к-ые явл-ся реш-ем задачи Коши на отр-ке $[a;b]$

Д-во:

Рассм. посл-ть ф-й $y_1^k(t), \dots, y_n^k(t)$:

$y_i^0(t) = y_{0i}$, $y_i^{k+1}(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1^k(\tau), \dots, y_n^k(\tau))$

Док-м, что $y_i^k(t)$ опр-ны и непр-ны на $[a;b]$

1) $k = 0$

$y_i^0(t)$ опр-ны и непр-ны на $[a;b]$.

2) $k=m$

$\exists\, y_i^m(t)$ опр-ны и непр-ны на $[a;b]$

3) $k=m+1$.

$f_i(t, y_1, \dots, y_n)$ непр-ны при $t\in[a;b] \Rightarrow y_i^{m+1}(t)$ опр-ны и непр-ны на $[a;b]$

$\overset{\text{инд-я}}{\Rightarrow}$ $y_i^k(t)$ опр-ны и непр-ны на $[a;b]$

$\exists\, B = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \max\limits_{t\in[a;b]} \left|\int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_{01}, \dots, y_{0n})\,d\tau\right|$

Док-м, что $|y_i^{k+1}(t) - y_i^k(t)| \le B(nL)^k \frac{|t-t_0|^k}{k!}$

1) $k=0$

$|y_i^1(t) - y_i^0(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_{01}, \dots, y_{0n})\,d\tau\right| \le B$

2) $k=m-1$

$\exists\, |y_i^m(t) - y_i^{m-1}(t)| \le B(nL)^{m-1} \frac{|t-t_0|^{m-1}}{(m-1)!}$

3) $k=m$.

$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \le$

$\le \left|\int_{t_0}^{t} |f_i(\tau, y_1^m(\tau), \dots, y_n^m(\tau)) - f_i(\tau, y_1^{m-1}(\tau), \dots, y_n^{m-1}(\tau))|\,d\tau\right| \le$

$\le \left|\int_{t_0}^{t} L(|y_1^m(\tau) - y_1^{m-1}(\tau)| + \dots + |y_n^m(\tau) - y_n^{m-1}(\tau)|)\,d\tau\right| \le$

$\le \left|\int_{t_0}^{t} L\cdot B(nL)^{m-1} \frac{|\tau-t_0|^{m-1}}{(m-1)!}\,d\tau\right| \le$

$\le B(nL)^m \frac{|t-t_0|^m}{m!}$

$\overset{\text{инд-я}}{\Rightarrow} |y_i^{k+1}(t) - y_i^k(t)| \le B(nL)^k \frac{|t-t_0|^k}{k!}$

Рассм. на $[a;b]$ функц. ряды $y_i^0(t) + \sum\limits_{m=0}^{\infty}(y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t))$

$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \le B(nL)^m \frac{(b-a)^m}{m!} \overset{\text{пр-к Вей}}{\Rightarrow} y_i^0(t) + \sum\limits_{m=0}(y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_i^k(t) = y_i^0(t) + \sum\limits_{m=0}^{k-1}(y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} \bar{y}_i(t) \in C[a;b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{y}_i(t)$ - реш-я инт. ур-й $\Rightarrow \bar{y}_i(t)$ - реш-я задачи Коши

ч.т.д.

ξ: $\begin{cases} y_1'(t) = t\sin(y_1(t) + y_2(t)) + \frac{(y_1(t))^3}{1+(y_1(t))^2} \\ y_2'(t) = t^2 y_2(t) + \cos(y_1(t) + y_2(t)) \end{cases}$ - $\exists!$ реш-е на $\forall[a;b]$

Вопрос 12

Опр-е ф-и $y(t)$, кот. явл-ся реш-ем ОДУ n-ого пор-ка.

$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$, $t\in[a;b]$ и уд-ет нач усл-ям

$y(t_0) = y_{00}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}$, наз-ся задачей Коши для ОДУ n-ого пор-ка.

Ф-я $y(t)$ наз-ся реш-ем задачи Коши на отр-ке $[a;b]$, если она n раз диф-ма на $[a;b]$, явл-ся реш-ем ОДУ n-ого пор-ка и уд-ет нач. усл-ям

Т. сущ-я и ед-ти реш-я задачи Коши. $F(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ опр-на и непр-на при $t\in[a;b]$ и уд-ет усл-ю Липшица с const $L_1 > 0$. $\Rightarrow \exists!\, y(t)$, кот. явл-ся реш-ем задачи Коши на $[a;b]$

Д-во:

Док-м ед-ть реш-я.

$\exists\, y(t)$ - реш-е задачи Коши на $[a;b]$. Введем ф-и

$y_1(t) = y(t), \dots, y_n(t) = y^{(n-1)}(t)$

$y(t)$ - реш-е задачи Коши $\Rightarrow y_i(t)$ - реш-е задачи Коши для норм. с-мы ОДУ

$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ \dots \\ y_{n-1}'(t) = y_n(t) \\ y_n'(t) = F(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{cases}$

с нач. усл-ями $y_i(t_0) = y_{0i-1}$

Ф-и опр-ны и непр-ны при $t\in[a;b]$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и уд-ют усл-ю Липшица с $L = \max[1; L_1] \overset{\text{Т}}{\Rightarrow}$ реш-е задачи Коши для норм с-мы ОДУ - ед-ое $\Rightarrow$ реш-е задачи Коши ед-но

Док-м сущ-е реш-я.

Для задачи Коши для норм. с-м вып-ны усл-я сущ-я реш-я $\overset{T}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow$ сущ-ют непр. диф-ые на $[a;b]$ ф-и $y_i(t)$, дые уд-ют

норм. с-ме $\Rightarrow$ $y(t) = y_1(t)$ и раз диф-ма на $[a;b]$, $y^{(i-1)}(t) = y_i(t) \overset{опр.}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow$ $y(t)$ - реш-е задачи Коши

ч.т.д.

Вопрос 13

Опр-е ф-й $y_1(t), \dots, y_n(t)$, дые явл-ся реш-ями с-мы лин. ОДУ н-ого пор-ка.

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t) y_1(t) + \dots + a_{1n}(t) y_n(t) + \hat{f}_1(t) \\ \dots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t) y_1(t) + \dots + a_{nn}(t) y_n(t) + \hat{f}_n(t) \end{cases}, \text{ где } a_{ij}(t),\ \hat{f}_i(t) \in C[a;b]$$

и уд-ют нач. усл-ям $y_i(t_0) = y_{0i}$, наз-ся задачей Коши для с-мы лин. ОДУ н-ого пор-ка.

Т. сущ-я и ед-ти реш-я задачи Коши. $a_{ij}(t), \hat{f}_i(t) \in C[a;b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!\ y_1(t), \dots, y_n(t)$, дые явл-ся реш-ем задачи Коши на $[a;b]$

Д-во:

$\exists\ f_i(t, y_1, \dots, y_n) = a_{i1}(t) y_1 + \dots a_{in}(t) y_n + \hat{f}_i(t)$

$f_i(t, y_1, \dots, y_n)$ опр-ны и непр-ны при $t \in [a;b]$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и

уд-ют усл-ю Липшица с $L = \max\limits_{1 \le i, j \le n} \max\limits_{t \in [a;b]} |a_{ij}(t)| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для задачи Коши для норм с-м вып-ны усл-я ед-ти

реш-я и сущ-я реш-я $\overset{T.T.}{\Rightarrow}$ $\exists!$ реш-е задачи Коши

ч.т.д.

Опр-е ф-и $y(t)$, дое явл-ся реш-ем лин. ОДУ н-ого пор-ка

$a_0(t) y^{(n)}(t) + \dots + a_n(t) y(t) = f(t)$, где $a_i(t) \in C[a;b]$, и уд-ет

нач. усл-ям $y^{(i)}(t_0) = y_{0i}$, наз-ся задачей Коши для лин. ОДУ н-ого пор-ка

Т. сущ-я и ед-ти реш-я задачи Коши. $a_i(t), f(t) \in C[a;b]$

$\Rightarrow \exists!\ y(t)$, дая явл-ся реш-ем задачи Коши на $[a;b]$

Д-во:

$\exists\ F(t, y_1, \dots, y_n) = \frac{f(t)}{a_0(t)} - \frac{a_n(t)}{a_0(t)} y_1 - \dots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)} y_n$

$F(t, y_1, \dots, y_n)$ опр-на и непр-на при $t \in [a;b]$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и

уд-ет усл-ю Липшица с $L_1 = \max\limits_{1 \le i \le n} \max\limits_{t \in [a;b]} \left|\frac{a_i(t)}{a_0(t)}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для задачи Коши для ОДУ н-ого пор-ка вып-ны усл-я

сущ-я и ед-ти реш-я $\overset{T}{\Rightarrow}$ $\exists!$ реш-е задачи Коши

ч.т.д.

Вопрос 14

Комплекснозначной ф-ей дейст. арг-та $t \in [a;b]$ наз-ся ф-я

$y(t) = u(t) + i v(t)$, где $u(t)$ и $v(t)$ - действ. ф-и

$u(t), v(t) \in C[a;b] \Rightarrow y(t) \in C[a;b]$

$\exists\ u'(t), v'(t)$ на $[a;b] \Rightarrow \exists\ y'(t) = u'(t) + i v'(t)$ на $[a;b]$.

Рассм. лин. диф. ур-е н-ого пор-ка:

$a_0(t) y^{(n)}(t) + \dots + a_n(t) y(t) = f(t)$, где $a_k(t) \in C[a;b]$, $a_0(t) \ne 0$,

$f(t)$ - н/з ф-я, $f(t) \in C[a;b]$

Лин. диф. оператором н-ого пор-ка наз-ся оператор

$\mathcal{L} y = a_0(t) y^{(n)}(t) + \dots + a_n(t) y(t)$

$f(t) = 0 \overset{\forall t \in [a;b]}{\Longleftrightarrow}$ ур-е $\mathcal{L} y = f(t)$ наз-ся однородным

$f(t) \ne 0\ \forall t \in [a;b] \Rightarrow$ ур-е $\mathcal{L} y = f(t)$ наз-ся неоднородным

I св-во. $y_k(t)$, $k = \overline{1,m}$ явл-ся реш-ями ур-й $\mathcal{L} y_k = f_k(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k y_k(t)$, где $c_k \in \mathbb{C}$, явл-ся реш-ем ур-я $\mathcal{L} y = f(t)$,

где $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k f_k(t)$

Д-во:

$\mathcal{L} y = \mathcal{L} \sum\limits_{k=1}^{m} c_k y_k(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k \mathcal{L} y_k = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k f_k(t) = f(t)$, $t \in [a;b]$

ч.т.д.

II св-во. Реш-е задачи Коши $\mathcal{L}y = f(t)$, $y(t_0) = y_{00}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}$ представимо в виде суммы $y(t) = u(t) + w(t)$, где $u(t)$ - реш-е задачи Коши для неоднородн. ур-я с нул. нач. усл-ями, а $w(t)$ - -"- для однородн. ур-я с ненул. нач. усл-ями

Д-во:

$u(t)$ - реш-е ..., $w(t)$ - реш-е ... $\overset{\text{I св-во}}{\Rightarrow}$ $y(t)$ уд-ет ур-ю

$y^{(k)}(t_0) = u^{(k)}(t_0) + w^{(k)}(t_0) = 0 + y_{0k} = y_{0k}$

ч.т.д.

III св-во. Реш-е задачи Коши для однородн. ур-я $\mathcal{L}y = 0$, $y(t_0) = y_{00}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}$ представимо в виде суммы $y(t) = \sum\limits_{m=0}^{n-1} y_m(t)\, y_{0m}$, где ф-и $y_m(t)$ явл-ся реш-ями задач Коши $\mathcal{L}y_m = 0$, $y_m^{(m)}(t_0) = 1$, $y_m^{(k)}(t_0) = 0$.

Д-во:

$y(t) = \sum\limits_{m=0}^{n-1} y_{0m}\, y_m(t) \overset{\text{I св-во}}{\Rightarrow} y(t)$ уд-ет ур-ю

$y^{(k)}(t_0) = \sum\limits_{m=0}^{n-1} y_m^{(k)}(t_0)\, y_0^{(m)} = y_k^{(k)}(t_0)\, y_{0k} = y_{0k}$

ч.т.д.

Вопрос 15

Рассм. произв. скал. ф-и $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ опр-ые на отр-ке $[a;b]$ и принимающие компл. знач-я.

Скал. ф-и $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ наз-ся линейно зависимыми на отр-ке $[a;b]$, если $\exists c_k \in \mathbb{C}: \sum\limits_{k=1}^{m} |c_k| > 0$, $c_1\varphi_1(t) + \dots + c_m\varphi_m(t) = 0$ $\forall t \in [a;b]$.

Если $c_1\varphi_1(t) + \dots + c_m\varphi_m(t) = 0$ $\forall t \in [a;b]$ $\forall t \in [a;b]$ только при $c_k = 0$, то скал. ф-и $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ наз-ся линейно независимыми на отр-ке $[a;b]$

Опр-лем Вронского с-мы ф-й $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$, состоящей из $(m-1)$ раз непр-но диф-мых ф-й, наз-ся зав-ий от перем-ой $t \in [a;b]$ опр-ль

$$W[\varphi_1, \dots, \varphi_m](t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_m(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_m'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)}(t) & \varphi_2^{(m-1)}(t) & \dots & \varphi_m^{(m-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Необх. усл-е л/з-ти. $\varphi_i(t)$ $(m-1)$ раз диф-мы, $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ - л/з $\overset{\text{на } [a;b]}{}\Rightarrow$
$\Rightarrow W[\varphi_1, \dots, \varphi_m](t) = 0$ $\forall t \in [a;b]$

Д-во:

$\varphi_k(t)$ - л/з на $[a;b] \Rightarrow \exists c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}: \sum\limits_{i=1}^{m} |c_i| \neq 0$, $c_1\varphi_1(t) + \dots + c_m\varphi_m(t) = 0$ $\forall t \in [a;b] \Rightarrow c_1\varphi_1^{(k)}(t) + \dots + c_m\varphi_m^{(k)}(t) = 0$ $\forall t \in [a;b] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в-р-столбцы опр-ля Вронского л/з $\Rightarrow W[\varphi_1, \dots, \varphi_m](t) = 0$ $\forall t \in [a;b]$

ч.т.д.

Вопрос 16

Рассм. лин. однородн. диф. ур-е пор-ка n:

$a_0(t)\, y^{(n)}(t) + \dots + a_n(t)\, y(t) = 0$, где $a_i(t) \in C[a;b]$, $a_0(t) \neq 0$ (1)

Т. об альтернативе для опр-ля Вронского. Для реш-й $y_1(t), \dots, y_n(t)$ лин. однородн. ур-я (1) на отр-ке $[a;b]$ справедлива след. альтернатива:

1) $W[y_1, \dots, y_n](t) \equiv 0$ на $[a;b]$ и $y_1(t), \dots, y_n(t)$ - л/з на $[a;b]$
2) $W[y_1, \dots, y_n](t) \neq 0$ на $[a;b]$ и $y_1(t), \dots, y_n(t)$ - л/н на $[a;b]$

Д-во:

$\exists W[y_1, \dots, y_n](t_0) = 0$. Рассм. СЛАУ отн-но $c_1, \dots, c_n$:

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + \ldots + c_n y_n(t_0) = 0 \\ c_1 y_1'(t_0) + \ldots + c_n y_n'(t_0) = 0 \\ \ldots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$$

Опр-ль нои с-мы $= W[y_1, \ldots, y_n](t_0) = 0 \Rightarrow \exists$ реш-е $\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n$:
$\sum_{k=1}^{n} |\tilde{c}_k| > 0$

$$\left.\begin{array}{l} \rceil\ \tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k y_k(t) \overset{\text{I св-во}}{\Longrightarrow} \tilde{y}(t) \text{ - реш-е одиор. диф ур-я} \\ \tilde{y}^{(m)}(t_0) = 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\overset{\text{т. о ед-ти реш-я}}{\Longrightarrow}$ $y(t) = 0 \Rightarrow y_k(t)$ - л/з $\overset{\text{необх усл-е}}{\Longrightarrow}$ $W[\ldots](t) = 0 \;\; \forall t \in [a;b]$

$\rceil\ \exists\, \hat{t} \in [a;b]: W[\ldots](\hat{t}) \neq 0 \Rightarrow W[\ldots](t) \neq 0 \;\; \forall t \in [a;b] \Rightarrow$

$\Rightarrow y_k(t)$ - л/н на $[a;b]$

ч.т.д.

Вопрос 17.

Фунд. с-мой реш-й лин. одиор. ур-я n-ого пор-ка на отр-ке $[a;b]$ $a_0(t) y^{(n)}(t) + \ldots + a_n(t) y(t) = 0$ $\overset{(1)}{\vee}$ наз-ся с-ма из n л/н на $[a;b]$ реш-й этого ур-я (1)

Т. о сущ-и ФСР. У $\forall$ого лин. одиор. ур-я $\exists$ ФСР на $[a;b]$

Д-во:

Рассм. пост. м-цу $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\det B \neq 0$

$\rceil\ y_j(t)$ - реш-я задачи Коши для ур-я (1) с нач. усл-ями
$y_j(t_0) = b_{1j}$, $y_j'(t_0) = b_{2j}$, ..., $y_j^{(n-1)}(t_0) = b_{nj}$

По т. сущ-я и ед-ти реш-я задачи Коши $\Rightarrow y_j(t)$ сущ-ют и опр-ны однозначно

$y_j(t_0) = b_{1j}, \ldots, y_j^{(n-1)}(t_0) = b_{nj} \Rightarrow W[y_1, \ldots, y_n](t_0) = \det B \neq 0 \overset{\text{т. об альт-ве}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow W[y_1, \ldots, y_n](t) \neq 0 \;\; \forall t \in [a;b]$ и $y_j(t)$ - л/н на $[a;b] \Rightarrow$

$\Rightarrow y_j(t)$ обр-ют ФСР для ур-я (1)

ч.т.д.

Общим реш-ем лин. одиор. диф. ур-я n-ого пор-ка (1) наз-ся зависящее от n произв. пост-ых реш-е этого ур-я: $\forall$ое другое реш-е м.б. получено из него выбором нек-ых знач-й этих пост-ых.

Т. об общ. реш-и. $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ - ФСР лин. одиор. ур-я (1) на $[a;b] \Rightarrow$ общее реш-е ур-я (1) на $[a;b]$ имеет вид
$y_{oo}(t) = c_1 y_1(t) + \ldots + c_n y_n(t) \quad \forall c_i \in \mathbb{C}$

Д-во:

Лин. комб-я реш-й ур-я (1) - реш-е $\Rightarrow \forall c_i \in \mathbb{C}$ $y_{oo} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t)$ - реш-е

Док-м, что $\forall$ое реш-е м.б. получено из $y_{oo}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t)$

$\rceil\ \tilde{y}(t)$ - реш-е ур-я (1). Рассм. САУ отн-но c_k

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + \ldots + c_n y_n(t_0) = \tilde{y}(t_0) \\ c_1 y_1'(t_0) + \ldots + c_n y_n'(t_0) = \tilde{y}'(t_0) \\ \ldots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = \tilde{y}^{(n-1)}(t_0) \end{cases}, \quad t_0 \in [a;b]$$

$y_1(t), \ldots, y_n(t)$ - л/н на $[a;b] \Rightarrow W[y_1, \ldots, y_n](t_0) \neq 0 \Rightarrow$ с-ма имеет единств. реш-е $\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n$

$$\left.\begin{array}{l} \rceil\ \hat{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k y_k.\ \hat{y}(t) \text{ - реш-е ур-я (1)} \\ \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n \text{ - реш-е с-мы} \Rightarrow \hat{y}^{(k)} \end{array}\right] \overset{\text{т. о }\exists!\text{ реш-я зад К.}}{\Longrightarrow}$$

$\Rightarrow \tilde{y}(t) = \hat{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k y_k$

ч.т.д.

Вопрос 18.

Рассм. лин. неодиор. ур-е $a_0(t) y^{(n)}(t) + \ldots + a_0(t) y(t) = f(t)$ (1)

~~Общим реш-ем лин. неодиор. ур-я n-ого~~

Опр-е общего реш-я ан-но лин. одиор. ур-ю.

Т. о ФСР. $y_1(t), \dots, y_n(t)$ – ФСР лин. однор. ур-я на $[a;b]$, $y_ч(t)$ – частн. реш-е неоднор. ур-я (1) $\Rightarrow$ общ. реш-е лин. неоднор. ур-я (1) имеет вид $y_{он}(t) = y_ч(t) + y_{оо}(t)$

Метод вариации пост-ных:

$\exists\, y_1(t), \dots, y_n(t)$ – ФСР лин. однор. ур-я

$\exists\, y_ч(t) = c_1(t)y_1(t) + \dots + c_n(t)y_n(t)$, где $c_1(t), \dots, c_n(t) \in C^1[a;b]$

Рассм. СЛАУ отн-но $c_k'(t)$ $\forall t \in [a;b]$

$$\left.\begin{cases} c_1'(t)y_1(t) + \dots + c_n'(t)y_n(t) = 0 \\ \dots \\ c_1'(t)y_1^{(n-2)}(t) + \dots + c_n'(t)y_n^{(n-2)}(t) = 0 \\ c_1'(t)y_1^{(n-1)}(t) + \dots + c_n'(t)y_n^{(n-1)}(t) = \frac{f(t)}{a_0(t)} \end{cases} \\ y_k(t) - \text{ФСР} \Rightarrow W[y_1, \dots, y_n](t) \neq 0 \right] \Rightarrow c_k'(t) = g_k(t) - \text{ед. реш-е} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_k(t) = \int_{t_0}^{t} g_k(\tau)\,d\tau$$

$y_ч(t) = c_1(t)y_1(t) + \dots + c_n(t)y_n(t) \Rightarrow$

$$y_ч'(t) = c_1(t)y_1'(t) + \dots + c_n(t)y_n'(t)$$

$\Rightarrow \dots$ $\Rightarrow$

$$y_ч^{(n-1)}(t) = c_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + \dots + c_n(t)y_n^{(n-1)}(t)$$

$$y_ч^{(n)}(t) = c_1(t)y_1^{(n)}(t) + \dots + c_n(t)y_n^{(n)}(t) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k'(t)y_k^{(n-1)}(t)}_{=\frac{f(t)}{a_0(t)}}$$

$\Rightarrow$ при выч-и произв-ных $y_ч(t)$ до пор-ка $(n-1)$ ф-и $c_j(t)$ не зависят от t и явл-ся const.

Подставим $y_ч(t)$ в левую часть ур-я (1):

$$\mathcal{L}y_ч(t) = a_0(t)\cdot\frac{f(t)}{a_0(t)} + a_0(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k^{(n)}(t) + \dots + a_n(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k(t) =$$

$$= f(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\mathcal{L}y_k(t) \overset{y_k(t) - \text{реш-я}}{=} f(t) + 0 = f(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_ч(t) = c_1(t)y_1(t) + \dots + c_n(t)y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t)\int_{t_0}^{t} g_k(\tau)\,d\tau \;-$$

реш-е неоднор. ур-я (1)

Вопрос 19.

Рассм. лин. однор. диф. ур-е n-ого пор-ка:

$a_0y^{(n)}(t) + \dots + a_ny(t) = 0$ (1)

$\mathcal{L}y = 0$

Сопоставим диф. оп-ру $\mathcal{L}$ мн-член $M(\lambda) = a_0\lambda^n + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$, к-ый наз-ся характеристическим мн-членом

Ур-е $M(\lambda) = 0$ наз-ся хар. ур-ем

Л.1 $\forall g(t) \in C^n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}g(t)) = e^{\lambda t}\sum_{m=0}^{n}\frac{M^{(m)}(\lambda)\,g^{(m)}(t)}{m!}$$

Л.2 $\forall \lambda_j$ – корень хар. ур-я кр-ти k_j ! ф-и $e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \dots, t^{k_j-1}e^{\lambda_j t}$ – реш-я однор. ур-я (1)

Т. С-ма ф-й $e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \dots, t^{k_j-1}e^{\lambda_j t}$ составляет ФСР лин. однор. диф. ур-я с пост. коэф-тами (1) на $\forall[a;b]$

Д-во:

Дост-но док-ть, что с-ма ф-й л/н на $\forall[a;b]$

$\exists \sum_{k=0}^{k_1-1} C_{1,k}t^ke^{\lambda_1 t} + \dots + \sum_{k=0}^{k_l-1} C_{l,k}t^ke^{\lambda_l t} \equiv 0$ – нетрив. лин. комб-я $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + P_l(t)e^{\lambda_l t} \equiv 0$, где $s_j = \deg P_j(t) \leq k_j - 1$, $P_l(t) \neq 0 \overset{\times e^{-\lambda_1 t}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow P_1(t) + P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \dots + P_l(t)e^{(\lambda_l-\lambda_1)t} \equiv 0$

$(P_j(t)e^{\mu t})' = (\mu P_j(t) + P_j'(t))e^{\mu t} \Rightarrow \frac{d^{s_1+1}}{dt^{s_1+1}}\left(P_j(t)e^{(\lambda_j-\lambda_1)t}\right) = Q_j(t)e^{(\lambda_j-\lambda_1)t}$, где $\deg Q_j(t) = s_j$, $Q_j(t) = (\lambda_j-\lambda_1)^{s_1+1}p_jt^{s_j} + \dots$ $\Bigg] \overset{\frac{d^{s_1+1}}{dt^{s_1+1}}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \dots + Q_l(t)e^{(\lambda_l-\lambda_1)t} \equiv 0 \overset{\times e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}}{\Longrightarrow} \dots \overset{\frac{d^{s_2+1}}{dt^{s_2+1}}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow R_3(t)e^{(\lambda_3-\lambda_2)t} + \dots + R_l(t)e^{(\lambda_l-\lambda_2)t} \equiv 0$, $\deg R_j(t) = s_j$, $R_j(t) = (\lambda_j-\lambda_2)^{s_2+1}(\lambda_j-\lambda_1)^{s_1+1}p_jt^{s_j} + \dots$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow S_l(t)e^{(\lambda_l-\lambda_{l-1})t} \equiv 0$, $\deg S_l(t) = s_l$, $S_l(t) = (\lambda_l-\lambda_{l-1})^{s_{l-1}+1}\dots(\lambda_l-\lambda_1)^{s_1+1}p_lt^{s_l} + \dots \Rightarrow$

$\overset{P_l(t)\neq 0}{\Longrightarrow}$?! $\Rightarrow$ с-ма л/н.

ч.т.д.

Вопрос 20.

Д-во т. о ФСР для неоднор. ур-й:

Ур-е (1) лин. $\Rightarrow y_{он}(t) = y_{ч}(t) + y_{оо}(t)$ - реш-е.

Док-м, что $\forall \tilde{y}(t)$ - реш-е $\exists \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_n$: $\tilde{y}(t) = y_{ч}(t) + \tilde{C}_1 y_1(t) + \dots + \tilde{C}_n y_n(t)$ $\forall t \in [a;b]$

$\tilde{y}(t)$ - реш-е (1) $\Rightarrow y(t) = \tilde{y}(t) - y_{ч}(t)$ - реш-е одноp. ур-я $\xRightarrow{\text{т. об общ реш-й}}$

$\Rightarrow \exists \tilde{C}_j \in \mathbb{C}$: $y(t) = \tilde{C}_1 y_1(t) + \dots + \tilde{C}_n y_n(t) \Rightarrow \tilde{y}(t) = y_{ч}(t) + \tilde{C}_1 y_1(t) + \dots + \tilde{C}_n y_n(t)$

ч.т.д.

Рассм. вопрос о н-и лин. одиор. диф. ур-я

$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)y(t) = 0$ (1) (1)

$\underline{\mathrm{T.1.}}$ $a_m(t) \in C[a;b] \Rightarrow$ лин. одиор. ур-е (1) однозн. опр-ся её ФСР

$\underline{\mathrm{T.\ о\ н\text{-}и\ лин.\ ОДУ}}$ $y_1(t), \ldots, y_n(t) \in C^n[a;b]$, $W[y_1, \ldots, y_n](t) \neq 0$ $\forall t \in [a;b] \Rightarrow \exists$ лин. одиор. диф. ур-е н-ого пор-ка: $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ - её ФСР.

Д-во:

Рассм. на $[a;b]$ лин. одиор. диф. ур-е н-ого пор-ка для ф-и $y(t)$:

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) & y(t) \\ y_1'(t) & \ldots & y_n'(t) & y'(t) \\ & \ldots & & \\ y_1^{(n)}(t) & \ldots & y_n^{(n)}(t) & y^{(n)}(t) \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$ (2)

Разложим опр-ль по посл. столбцу

Коэф-т при $y^{(n)}(t) = W[y_1, \ldots, y_n](t) \neq 0 \Rightarrow$ поделив на него получим ур-е (1) с непр. на $[a;b]$ коэф-тами

При подст-ке $y(t) = y_k(t)$ в опр-ле мы получим 2 один. столбца $\Rightarrow y_1(t), \ldots, y_n(t)$ - реш-я ур-я

ч.т.д.

$$\Delta(t) = W[y_1, \ldots, y_n](t) \Rightarrow \Delta'(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) \\ & \ldots & \\ y_1^{(n-2)}(t) & \ldots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n)}(t) & \ldots & y_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}$$

$\exists\, y_1(t), \ldots, y_n(t)$ - ФСР ур-я (1). Поделим ур-е (2) на $\Delta(t)$ и получим ур-е (1) $\Rightarrow a_1(t) = -\frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta(t) = \Delta(t_0)\, e^{\wedge}\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)\,d\tau\right)$, $t \in [a;b]$ - ф-ла Остроградского - Лиувилля

Вопрос 21

Рассм. на $[a;b]$ норм. с-му лин. ОДУ I пор-ка в вект. форме

$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A(t)\bar{y}(t) + \bar{f}(t)$, (1) где (1)

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ & \ldots & \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \ldots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad a_{ij}(t) \in C[a;b],\ f_j(t) \in \mathbb{C}$$

С-ма (1) наз-ся однородной, если $\bar{f}(t) \equiv \bar{\theta}$ на $[a;b]$, и неоднородной в противном случае

$\underline{\Lambda.}$ $\bar{y}_1(t)$ и $\bar{y}_2(t)$ - реш-я лин. о/р с-мы $\Rightarrow \bar{y}(t) = \alpha\bar{y}_1(t) + \beta\bar{y}_2(t)$ - тоже $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $(t \in [a;b])$

Рассм. лин. о/р с-му ОДУ $\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A(t)\bar{y}(t)$ (2) $t \in [a;b]$, где (2)

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ & \ldots & \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \ldots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

$\exists\, \bar{y}_j(t) = [y_{1j}(t) \ \ldots \ y_{nj}(t)]^T$, $Y(t) = [\bar{y}_1(t) \ \ldots \ \bar{y}_n(t)]$ (3) (3)

Сопоставим с-ме (2) матричное о/р диф. ур-е

$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t)$ (4) (4)

$\underline{\mathrm{T}\ об\ экв\text{-}ти\ с\text{-}мы\ ОДУ\ матр.\ ОДУ}$ $\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)$ - реш-я с-мы (2) на отр-ке $[a;b] \Leftrightarrow Y(t)$ - реш-е матр. ур-я (4)

$\underline{\text{Св-ва реш-й матр. о/р ДУ}}$ $Y(t)$ - реш-е матр. о/р ДУ $\Rightarrow$

1) $\forall \bar{c} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ $\bar{y}(t) = Y(t)\bar{c}$ уд-ет с-ме (2)

2) $\forall B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $X(t) = Y(t)B$ уд-ет ур-ю (4)

Вопрос 22

В-р-ф-и $\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)$ наз-ся лин. зависимыми на $[a;b]$, если $\exists\, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$: $\sum_{j=1}^{m} |c_j| > 0$, $c_1\bar{y}_1(t) + \ldots + c_n\bar{y}_n(t) = \bar{\theta}$ $\forall t \in [a;b]$ (1)

Если рав-во (1) вып-но только для $\bar{c} = \bar{\theta}$, то они лин. независимы

(*) $\Leftrightarrow Y(t)\bar{c} = \bar{\theta}$

Опр-лем Вронского ~~для~~ в-р-ф-й $\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)$ на $[a;b]$ наз-ся опр-ль матр. ф-и $Y(t)$:

$\Delta(t) = \det Y(t)$

Необх. усл-е л/з-ти. $\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)$ - л/з на $[a;b] \Rightarrow \Delta(t) = 0 \ \forall t \in [a;b]$

Вопрос 23

Рассм. с-му из n-мерн в-р-ф-й $\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)$, кие явл-ся реш-ем лин. о/р с-мы диф. ур-й $\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A(t)\bar{y}(t) \quad t \in [a;b]$ (1)

$Y(t)$ - соотв. матр. ф-я из $Y(t) = [\bar{y}_1(t) \ \ldots \ \bar{y}_n(t)]$

Пр-к л/з-ти реш-й с-мы. $\exists \ \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)$ - с-ма в-р-ф-й реш-й лин. о/р с-мы (1) на $[a;b]$. $\exists t_0 \in [a;b]$: $\det Y(t_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)$ - л/з на $[a;b]$ и $\det Y(t) = 0 \ \forall t \in [a;b]$

Т. об альт-ве для опр-ля Вронского. $\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)$ - реш-я ~~с-мы~~ о/р с-мы (1) $\Rightarrow$

1) $\Delta(t) \equiv 0 \ \forall t \in [a;b]$, $\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)$ - л/з на $[a;b]$

2) $\Delta(t) \neq 0 \ \forall t \in [a;b]$, $\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)$ - л/н на $[a;b]$

Вопрос 24

Фунд. с-мой реш-й лин. о/р с-мы диф. ур-й $\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A(t)\bar{y}(t)$ пор-ка n на $[a;b]$ наз-ся совок-ть n л/н реш-й $\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)$ этой с-мы.

Соотв. функц. м-ца $Y(t) = [\bar{y}_1(t) \ \ldots \ \bar{y}_n(t)]$ наз-ся фунд. м-цей

Т. о сущ-и ФСР. $\forall$ лин. о/р с-мы диф. ур-й с непр. на $[a;b]$ коэф-тами $\exists$ ФСР.

Общим реш-ем лин. о/р с-мы диф. ур-й наз-ся зависящее от n произв. пост-ых реш-е этой с-мы: $\forall$ другое реш-е мб получено выбором нек-ых знач-й этих пост-ых.

Т. об общ. реш-и. $\bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)$ - ФСР лин. о/р с-мы на $[a;b] \Rightarrow$ $\Rightarrow$ её общ. реш-е представимо в виде $\bar{y}_{oo}(t) = c_1\bar{y}_1(t) + \ldots + c_n\bar{y}_n(t)$, $c_i \in \mathbb{C}$

Функц. м-ца $Z(t, t_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0)$ наз-ся матрицантом. Как матр. ф-я от t она явл-ся реш-ем след. задачи Коши $\frac{dZ(t,t_0)}{dt} = A(t)Z(t,t_0)$, $Z(t_0,t_0) = I$.

Вопрос 25

Рассм. лин. н/о с-му с непр. в-ром $\bar{f}(t) = [f_1(t) \ \ldots \ f_n(t)]^T$:

$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A(t)\bar{y}(t) + \bar{f}(t)$, $t \in [a;b]$ (1) (1)

Опр-е общего реш-я ан-но лин. о/р с-ме.

Т. об общ. реш-и. $\bar{y}_{он}(t)$ - общ. реш-е лин. н/о с-мы (1) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \bar{y}_{он}(t) = Y(t)\bar{c} + \bar{y}_{чн}(t)$, где $\bar{y}_{чн}(t)$ - частн. реш-е н/о с-мы (1)

Метод вариации пост-ых. $\forall t_0 \in [a;b]$ $\bar{y}_{чн}(t) = \int_{t_0}^{t} Z(t,\tau)\bar{f}(\tau)d\tau$, $t \in [a;b]$ - частн. реш-е н/о с-мы (1): $\bar{y}_{чн}(t_0) = 0$.